

2.º TESTE

Disciplina	Matemática	Data	10 de dezembro 2020
Ano - Turma	11º C		

NOME: _____ Nº _____

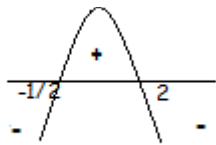
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque o que pretende que não seja classificado.
- Para cada resposta, identifique o item.
- Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.
- Apresente as suas respostas de forma legível e apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. O conjunto solução da condição $x(-2x + 3) \geq -2$ é:

- (A) $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$ (B) $[\frac{5}{2}, +\infty[$ (C) $[-\frac{1}{2}, 2]$ (D) $[-2, +\infty[$

Resolução:

$$-2x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, 2]$$



Cálculo auxiliar: $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 2 \times 2}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3-5}{-4} \vee x = \frac{-3+5}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{8}{-4} \vee x = \frac{2}{-4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$

Resposta (C)

2. Represente na **forma reduzida** o polinómio $P(x)$, sabendo que $P(x)$ é um polinómio de grau 4 tal que:

- $P(-1) = P(1) = P(2) = 0$
- 2 é raiz de multiplicidade 2
- O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 3$ é 16.

Resolução:

$$P(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)^2 \quad \text{e} \quad P(3) = 16 \Leftrightarrow a(3+1)(3-1)(3-2)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$a \times 4 \times 2 \times 1 = 16 \Leftrightarrow 8a = 16 \Leftrightarrow a = 2$$

$$P(x) = 2(x+1)(x-1)(x-2)^2 = 2(x^2-1)(x-2)^2 = 2(x^2-1)(x^2-4x+4) =$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 4x - 4) = 2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 8x - 8$$

3. Considere o polinômio $P(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11x + 6$

3.1. Sabendo que 1 é um zero de multiplicidade 2, fatorize o polinômio $P(x)$.

Resolução:

	-1	3	3	-11	6
1		-1	2	5	-6
	-1	2	5	-6	0
1		-1	1	6	
	-1	1	6	0	

$$P(x) = (x - 1)^2(-x^2 + x + 6) = -(x - 1)^2(x + 2)(x - 3) \text{ pois}$$

Cálculo auxiliar: $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \times 1 \times 6}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{-2} \vee x = \frac{-1+5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{-2} \vee x = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

3.2. Resolva a inequação $P(x) > 0$

Resolução:

$$P(x) = -(x - 1)^2(x + 2)(x - 3) > 0$$

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$-(x - 1)^2$	-	-	-	0	-	-	-
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+	0	-

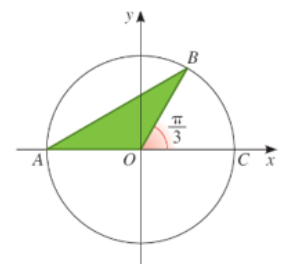
$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 3[\setminus \{1\} =]-2, 1[\cup]1, 3[$$

4. No referencial *o.n.* xOy da figura estão representados a circunferência trigonométrica e o triângulo $[AOB]$. Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- os pontos A e C pertencem ao eixo Ox ;
- $\widehat{COB} = \frac{\pi}{3}$ rad

A área do triângulo $[AOB]$ é:

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Resolução:

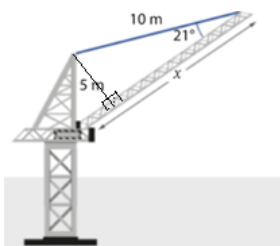
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{AO \times y_B}{2} = \frac{1 \times \sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta (C)

5. Considere a grua representada ao lado. Atendendo às medidas indicadas, determine o comprimento x , arredondado às décimas.

Nos cálculos intermédios que efetuar conserve, pelo menos, três casas decimais.

Resolução:



O esquema auxiliar para a resolução do exercício será o que se representa ao lado

O que se pretende determinar é $x = \overline{AD} + \overline{DC}$.

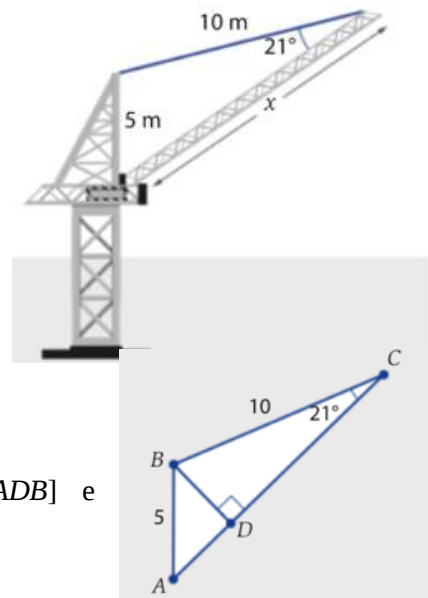
Vamos trabalhar com dois triângulos retângulos $[ADB]$ e $[BDC]$, em que um dos catetos (o cateto $[BD]$) é comum aos dois triângulos.

$$\cos 21^\circ = \frac{\overline{DC}}{10} \Leftrightarrow \overline{DC} = 10 \cos 21^\circ \approx 9,336 \text{ m}$$

$$\sin 21^\circ = \frac{\overline{BD}}{10} \Leftrightarrow \overline{BD} = 10 \sin 21^\circ \approx 3,584 \text{ m}$$

$$\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 5^2 - 3,584^2 \approx 3,486 \text{ m}$$

Concluimos que $x = 9,336 + 3,486 = 12,822$ logo $x = 12,8 \text{ m}$



6. Na figura está representado um trapézio $[ABCD]$. Sabe-se que $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

A amplitude α , em graus, do ângulo DCB é:

- (A) 60° (B) 155° (C) 120° (D) 150°

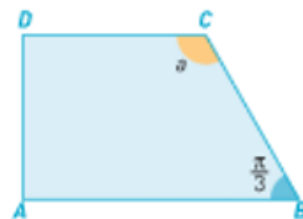
Resolução:

A amplitude em graus de $\widehat{CBA} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

Como os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, tem-se

$$\alpha = \widehat{DCB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Resposta (C)



7. Determine o valor exato de $\frac{\tan(-1845^\circ) - \sin(-2940^\circ)}{\cos^2(1260^\circ)}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{\tan(-45^\circ - 5 \times 360^\circ) - \sin(-60^\circ - 8 \times 360^\circ)}{\cos^2(180^\circ + 35 \times 360^\circ)} &= \frac{\tan(-45^\circ) - \sin(-60^\circ)}{\cos^2(180^\circ)} \\ &= \frac{-\tan 45^\circ + \sin 60^\circ}{(-1)^2} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

8. Considere um ângulo de amplitude α , em radianos, tal que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\cos \alpha \times \sin(-2\pi + \alpha) > 0$ (B) $\sin \alpha \times \tan(-\alpha) < 0$
(C) $\frac{\cos(-\alpha - 2\pi)}{\sin(4\pi + \alpha)} < 0$ (D) $\cos \alpha \times \tan(-\pi + \alpha) < 0$

Resolução:

$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\quad \text{logo } \alpha \text{ pertence ao 2.º Quadrante}$$

$$(A) \underbrace{\cos \alpha}_{-} \times \underbrace{\sin(-2\pi + \alpha)}_{\substack{\sin \alpha \\ +}} > 0 \quad \text{a afirmação é falsa}$$

$$(B) \underbrace{\sin \alpha}_{+} \times \underbrace{\tan(-\alpha)}_{\substack{-\tan \alpha \\ +}} < 0 \quad \text{a afirmação é falsa}$$

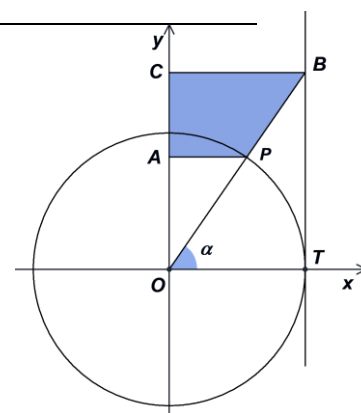
$$(C) \frac{\underbrace{\overbrace{\cos \alpha}^{-}}_{\cos(-\alpha)}}{\underbrace{\cos(-\alpha-2\pi)}_{\substack{\cos(-\alpha) \\ +}}} < 0 \quad \text{a afirmação é verdadeira}$$

$$(D) \underbrace{\cos \alpha}_{-} \times \underbrace{\tan(-\pi + \alpha)}_{\substack{\tan \alpha \\ -}} < 0 \quad \text{a afirmação é falsa}$$

Resposta (C)

9. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [APBC]. Sabe-se que:

- T tem de coordenadas (1, 0);
- a reta TB é definida pela equação $x = 1$;
- P é o ponto de interseção da reta OB com a circunferência trigonométrica;
- a amplitude, em radianos, do ângulo TOB é designada por α , com $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$;
- os pontos A e C são, respetivamente, as projeções ortogonais de P e B sobre Oy.



9.1. Determina o valor exato de $\overline{AC}$ se $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Resolução:

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \tan \alpha - \sin \alpha = \tan \alpha - \frac{4}{5}$$

Sabe-se que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

$$\text{Como } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ tem-se: } \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}.$$

O ângulo α é do 1.º quadrante, então $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

$$\text{Sabe-se que } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ então } \tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Então } \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \tan \alpha - \sin \alpha = \tan \alpha - \frac{4}{5}, \text{ tem-se: } \overline{AC} = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

9.2. Seja $A(\alpha)$ a área do trapézio [APBC] em função de α .

$$\text{Mostra que: } A(\alpha) = \frac{\tan \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

Resolução:

1º processo:

$$A(\alpha) = \frac{\overline{BC} + \overline{AP}}{2} \times \overline{AC} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \times (\tan \alpha - \sin \alpha) = \frac{(1 + \cos \alpha) \times (\tan \alpha - \sin \alpha)}{2} =$$

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha \tan \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{2} =$$

$$\frac{\tan \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{2} \quad \text{c.q.m}$$

2º processo:

$$A(\alpha) = \frac{\overline{BC} + \overline{AP}}{2} \times \overline{AC} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \times (\tan \alpha - \sin \alpha)$$

$$A(\alpha) = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha \times \tan \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

$$A(\alpha) = \frac{\tan \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} \quad \text{c.q.m}$$

9.3. Recorrendo ao resultado obtido em 9.2, se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, então a área do trapézio é:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Resolução:

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

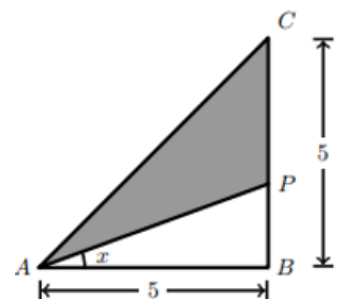
Resposta (A)

10. Na figura ao lado, está representado um triângulo retângulo [ABC], cujos catetos [AB] e [BC], medem 5 unidades. Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto [BC], nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$).

Prove que para cada valor de x , o **perímetro** do triângulo [APC] é dado por:

$$\frac{5}{\cos x} - 5 \tan x + \sqrt{50} + 5.$$

Resolução:



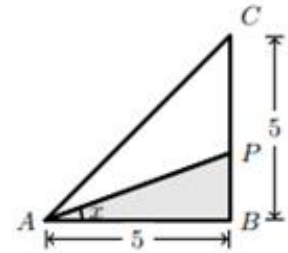
Relativamente ao triângulo retângulo $[ABP]$, do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo x , usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo x , temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{tg} x$$

Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$$



Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento $[AC]$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, o perímetro do triângulo $[APC]$ é dado por:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

11. Prove que, dado α um ângulo agudo, se tem: $\frac{\tan \alpha - \sin^2 \alpha \times \tan \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha$

Resolução:

1º Processo

$$\frac{\tan \alpha - \sin^2 \alpha \times \tan \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha (\cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cancel{\cos \alpha}} \cos \alpha = \sin \alpha \quad \text{c.q.m}$$

2º Processo

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin^2 \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cancel{\cos^2 \alpha}}{\cancel{\cos^2 \alpha}} = \sin \alpha$$

c.q.m