

1º TESTE

Disciplina	Matemática	Data	12 de novembro 2020
Ano - Turma	11º C		

NOME: _____ Nº _____

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ |-3x+6| - 5 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

1.1. Para $x \geq 0$

1.1.1. O contradomínio da função é:

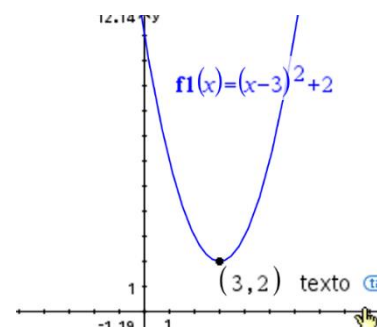
- (A) $[-2, +\infty[$ (B) $] -\infty, 2]$ (C) $[2, +\infty[$ (D) $[3, +\infty[$

Resolução:

O ramo da função para $x \geq 0$ representa uma parábola de vértice $V(3,2)$

Logo o contradomínio é $[2, +\infty[$

Resposta (C)



1.1.2. Indique os valores de x para os quais $f(x) \leq 11$.

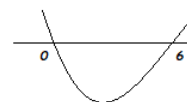
Resolução:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 2 &\leq 11 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 2 \leq 11 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 11 - 11 &\leq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x \leq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x &\leq 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliares:

$$S = [0,6]$$

$$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$



1.2. Para $x < 0$

1.2.1. Os zeros da função f são:

- (A) $\left\{-\frac{1}{3}, \right\}$ (B) Não tem zeros (C) $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right\}$ (D) $\left\{-\frac{11}{3}\right\}$

Resolução:

$$|-3x+6| - 5 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |-3x+6| = 5 \wedge x < 0 \Leftrightarrow (-3x+6 = 5 \vee -3x+6 = -5) \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow (-3x = -6 + 5 \vee -3x = -6 - 5) \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{11}{3}) \wedge x < 0 \quad \text{Equação impossível}$$

Resposta (B) Não tem zeros.

1.2.2. Defina a função sem utilizar o símbolo de módulo.

Resolução:

$$|-3x+6|-5 = \begin{cases} -3x+6-5 & \text{se } -3x+6 \geq 0 \\ 3x-6-5 & \text{se } -3x+6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+1 & \text{se } -3x \geq -6 \\ 3x-11 & \text{se } -3x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3x-11 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3x-11 & \text{se } x > 2 \end{cases} \text{ como } x < 0 \quad \text{então} \quad f(x) = \begin{cases} (x-3)^2+2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



1.2.3. Resolva a inequação $f(x) \leq 3$.

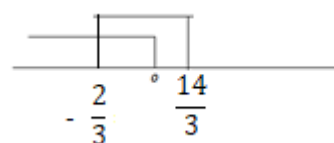
Resolução:

$$|-3x+6|-5 \leq 3 \wedge x < 0 \Leftrightarrow |-3x+6| \leq 8 \wedge x < 0 \Leftrightarrow (-3x+6 \leq 8 \wedge -3x+6 \geq -8) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$(-3x \leq 2 \wedge -3x \geq -14) \wedge x < 0 \Leftrightarrow (x \geq -\frac{2}{3} \wedge x \leq \frac{14}{3}) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

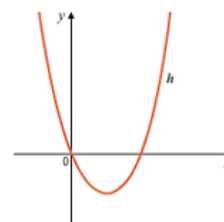
$$-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{14}{3} \wedge x < 0$$

$$S = \left[-\frac{2}{3}, 0\right[$$

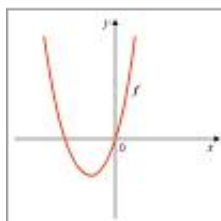


2. A função h está representada graficamente na figura.

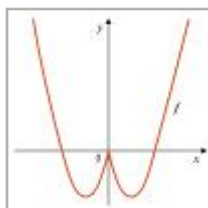
Qual dos gráficos seguintes poderá corresponder a $f(x) = |h(x)|$



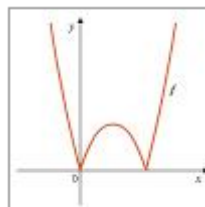
(A)



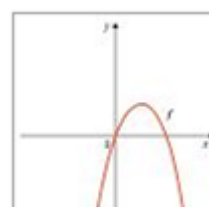
(B)



(C)



(D)



Resposta (C)

3. Represente **na forma reduzida** o polinómio $A(x)$, sabendo que satisfaz as seguintes condições:

- $A(x)$ tem grau 4;
- as únicas raízes de $A(x)$ são 2 e -1 e ambas têm multiplicidade 2;
- o resto da divisão de $A(x)$ por $x-3$ é 4.

Resolução:

$$A(x) = a(x-2)^2(x+1)^2$$

$$A(3) = 4 \Leftrightarrow a(3-2)^2(3+1)^2 = 4 \Leftrightarrow a \times 1 \times 16 = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Então

$$A(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+1)^2 = \frac{1}{4}(x^2-4x+4)(x^2+2x+1) = \frac{1}{4}(x^4+2x^3+x^2-4x^3-8x^2-4x+4x^2+8x+4) = \frac{1}{4}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 1$$

4. Seja $P(x) = ax^4 + 2x^3 - x + 2$.

4.1. O valor de a de modo que $P(x)$ seja divisível por $(x + 1)$ é:

- (A) $a = -2$ (B) $a = 0$ (C) $a = -1$ (D) $a = 1$

Resolução:

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow a(-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow a - 2 + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

4.2. Para o valor de a encontrado e sabendo que $P(x)$ também admite como raiz 2, resolva a inequação $P(x) > 0$.

Nota: Se não resolveu a alínea anterior considere $a = -1$.

Resolução:

$$P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 & \\ -1 & & 1 & -3 & 3 & -2 & \\ \hline & -1 & 3 & -3 & 2 & 0 & \\ 2 & & -2 & 2 & -2 & & \\ \hline & -1 & 1 & -1 & 0 & & \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(-x^2 + x - 1)$$

	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$-x^2 + x - 1$	-	-	-	-	-
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

5. Considere a família de polinómios $B(x)$ o polinómio tal que $B(x) = ax^3 + 2x^2 + b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

5.1. Determine para que valores de a e de b o polinómio $B(x)$ é divisível por $x + 2$ e dividido por $x - 1$ dá resto 3.

Resolução:

Os restos das divisões de $B(x)$ por $x + 2$ e por $x - 1$ são dados por $B(-2)$ e $B(1)$, respetivamente.

Sabe-se que os restos da divisão de $B(x)$ por $x + 2$ e por $x - 1$ são respetivamente 0 (porque $B(x)$ é divisível por $x + 2$) e 3.

Assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} B(-2) = 0 \\ B(1) = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a(-2)^3 + 2(-2)^2 + b = 0 \\ a(1)^3 + 2(1)^2 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-8) + 2 \times 4 + b = 0 \\ a + 2 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 8 + b = 0 \\ a + 2 + b = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 + 8a \\ a + b = 3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 + 8a \\ a - 8 + 8a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 + 8a \\ 9a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 + 8 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2. Considere $B(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$ que é divisível $x + 1$ e $P(x)$ um polinômio de grau 2, tal que

$P(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$. Determine o conjunto solução de $B(x) \times P(x) \leq 0$.

Resolução:

$B(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$ é divisível $x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & & -5 & 3 & -3 \\ \hline & 5 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

O quociente é $Q(x) = 5x^2 - 3x + 3$ logo $B(x) = (x + 1)(5x^2 - 3x + 3)$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 5 \times 3}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-51}}{10}$ equação impossível

Logo $Q(x) = 5x^2 - 3x + 3$ não tem zeros. Logo, não é possível decompor $Q(x)$ em fatores do primeiro grau, assim $B(x) = (x + 1)(5x^2 - 3x + 3)$

$$B(x) \times P(x) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5x^2 - 3x + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$B(x) \times P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$B(x) \times P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ([-2, -1] \cup [3, +\infty])$$

6. O valor exato de $\tan 60^\circ - (\sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ)^2$ é:

- (A) $\frac{11}{4} + 2\sqrt{3}$ (B) $-\frac{13}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{11}{4}$

Resolução:

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ - (\sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ)^2 &= \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sqrt{3} - \left(\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2\right) = \\ &= \sqrt{3} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{3} + 3\right) = \sqrt{3} - \left(\frac{13}{4} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{13}{4} - \sqrt{3} = -\frac{13}{4} \end{aligned}$$

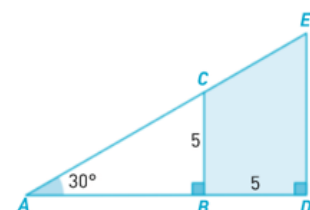
Resposta (B)

7. Na figura estão representados dois triângulos retângulos: $[ABC]$ e $[ADE]$.

Sabe-se que:

- $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 30^\circ$
- $\overline{BC} = \overline{BD} = 5$

Mostre que:



7.1. O perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a $15 + 5\sqrt{3}$

Resolução:

$$\text{Perímetro do } \Delta[ABC] = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

Cálculo de $\overline{AB}$:

$$\tan 30^\circ = \frac{5}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5}{\tan 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 5 \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

Cálculo de $\overline{CA}$:

$$\sin 30^\circ = \frac{5}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{5}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{CA} = 5 \times 2 = 10$$

$$\text{Logo o Perímetro do } \Delta[ABC] = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 5\sqrt{3} + 5 + 10 = 15 + 5\sqrt{3} \quad \text{c.q.p}$$

7.2. A área do trapézio $[BDEC]$ é igual a $25 + \frac{25\sqrt{3}}{6}$

Resolução:

$$\text{Área do trapézio } [BDEC] = \frac{\text{Base Maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{altura}$$

$$\text{Área do trapézio } [BDEC] = \frac{\overline{DE} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BD}$$

Cálculo de $\overline{DE}$:

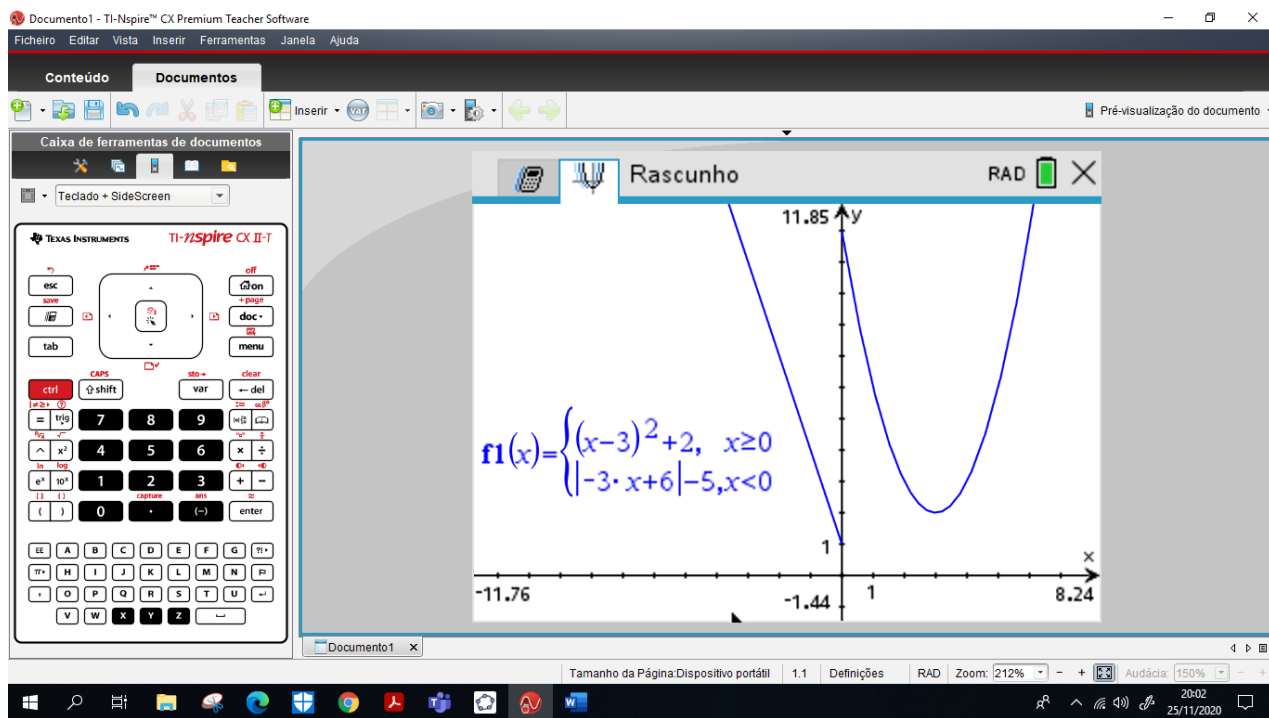
$$\begin{aligned} \tan 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB} + 5} &\Leftrightarrow \tan 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{5\sqrt{3} + 5} \Leftrightarrow \overline{DE} = (5\sqrt{3} + 5) \times \tan 30^\circ \Leftrightarrow \overline{DE} = (5\sqrt{3} + 5) \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{5 \times 3 + 5\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{3} = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área do trapézio } [BDEC] = \frac{\overline{DE} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BD} = \frac{5 + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 5}{2} \times 5 = \frac{10 + \frac{5\sqrt{3}}{3}}{2} \times 5 = \left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{6}\right) \times 5 =$$

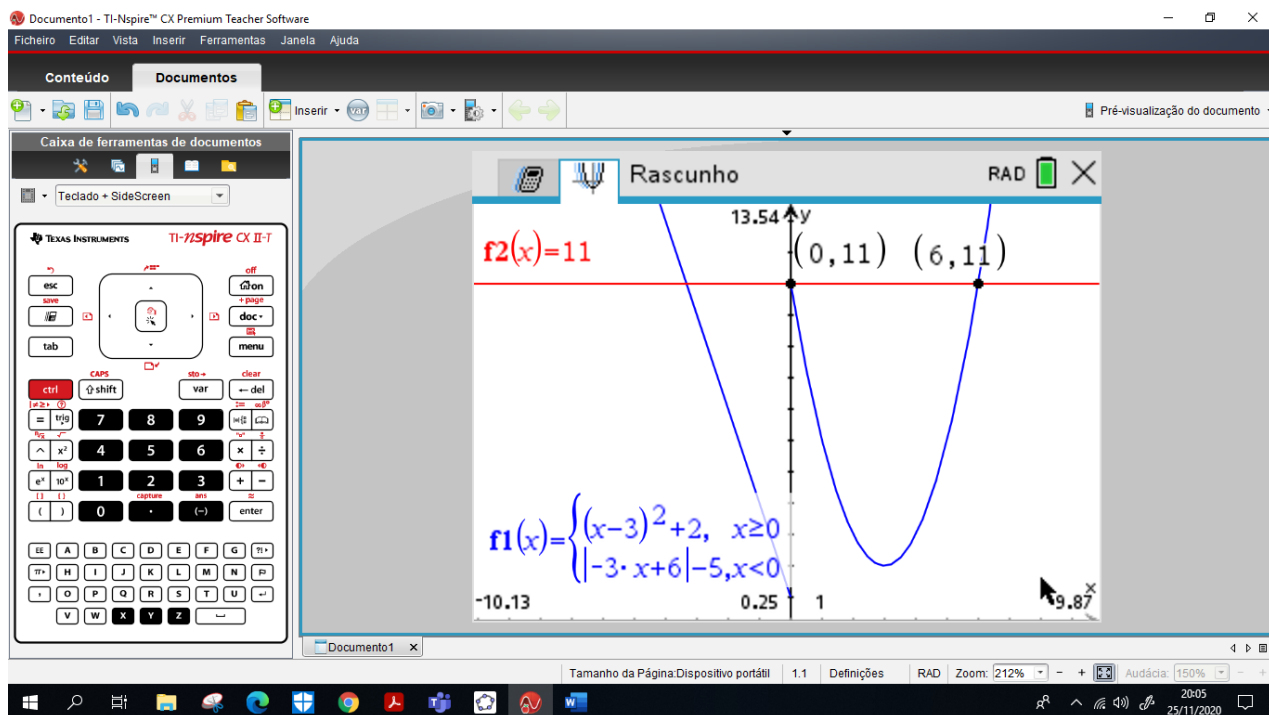
$$= 25 + \frac{25\sqrt{3}}{6} \quad \text{c.q.p}$$

Graficamente

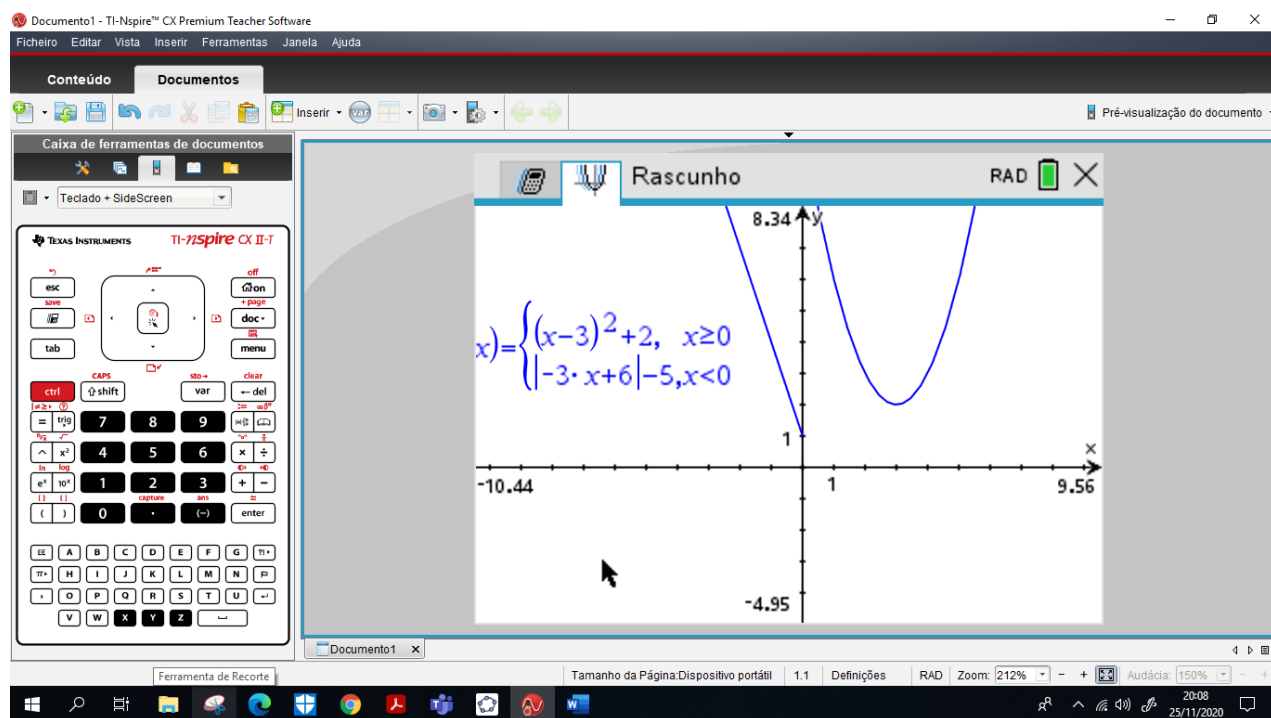
1.1.1



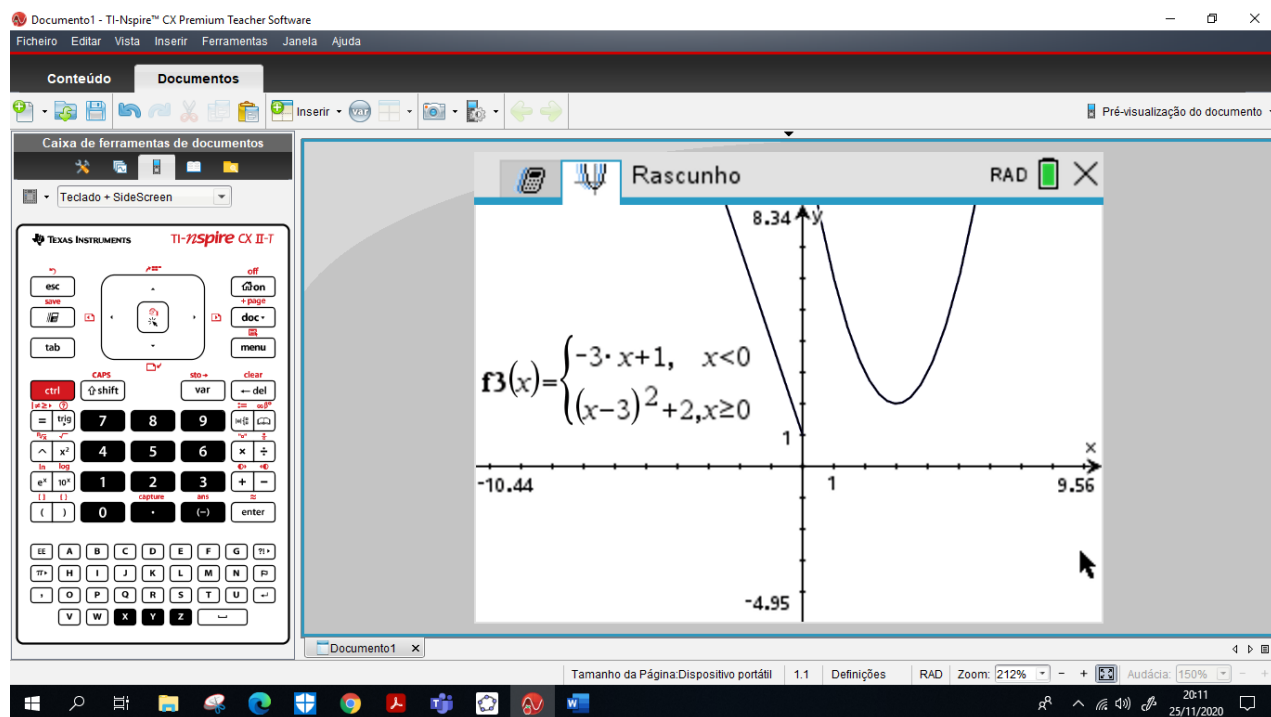
1.1.2.



1.2.1 a função não tem zeros



1.2.2



2. Por exemplo

