

QUESTÃO AULA N.º 1

Disciplina	Matemática A	Data	14 de janeiro de 2021
Ano	11.º	Duração	30 minutos
Nome:		N.º:	Turma C

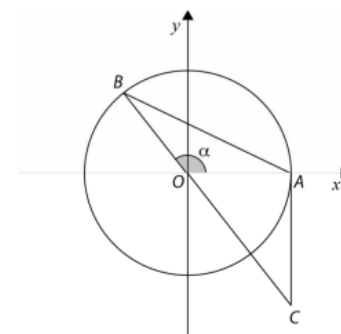
Apresente as suas respostas de forma legível e apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.
Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência

trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos da circunferência;
- o ponto A pertence ao eixo das abscissas;
- a reta AC é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto O pertence à reta BC;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



1.1. Mostre que a área do triângulo [ABC] pode ser dada, em função de α , por $A(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{2}$.

Resolução:

1.º processo:

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times (1 + |x_B|)}{2} \\
 &= \frac{| \tan \alpha | \times (1 + |x_B|)}{2} \stackrel{\tan \alpha < 0}{=} \frac{-\tan \alpha \times (1 + |\cos \alpha|)}{2} \stackrel{\cos \alpha < 0}{=} \frac{-\tan \alpha \times (1 - \cos \alpha)}{2} \\
 &= \frac{-\tan \alpha + \tan \alpha \times \cos \alpha}{2} = \frac{-\tan \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha}{2} = \frac{-\tan \alpha + \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{2} \text{ c. q. m}
 \end{aligned}$$

2.º processo:

Seja D a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox.

$$\begin{aligned}
 A_{[ABC]} &= A_{[AOB]} + A_{[AOC]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BD}}{2} + \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \\
 &= \frac{1 \times \sin \alpha}{2} + \frac{1 \times (-\tan \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{2}
 \end{aligned}$$

1.2. Considere o valor de α para o qual se tem $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2 \sin(7\pi - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Para este valor de α , e sem recorrer à calculadora a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato da área do triângulo [ABC].

Resolução

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\sin(7\pi - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\alpha + 2\sin(\pi - \alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha + 2\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$3\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

Como $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{\alpha \in 2^{\circ}Q} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Como } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Assim } A_{\Delta[ABC]} = \frac{\sin\alpha - \tan\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{\frac{4+3\sqrt{2}}{12}}{2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

2. Seja f a função de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \sin(2x)\cos x$

Do domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada, é máxima;
- B e C são os pontos de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 0,3$.

Reproduza o gráfico ou gráficos, visualizando(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Resolução

Começamos por representar na calculadora gráfica a função f e a reta de equação $y=0,3$, numa janela compatível com o domínio e obtemos o gráfico seguinte.

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{(x_C - x_B) \times (y_A - y_B)}{2} \approx \frac{0,47}{2} \approx 0,2$$

